Procesos Aleatorios (P.A.)

Promedio en tiempo.
Es la medida estadística en un tiempo determinado de una función muestral.

Promedio Conjunto.
Es el promedio estadístico de las medidas estadísticas de todas las funciones muestra en un tiempo determinado.

Proceso Aleatorio Estacionario.
Un proceso es estacionario, cuando las características estadísticas de las funciones muestra no varian con respecto al tiempo.

- **Proceso Aleatorio Estacionario en Sentido Estricto (SSS)**
  Un proceso aleatorio es estacionario en sentido estricto si su estadística es invariante ante un corrimiento temporal.

  $$f_x(x_1, \ldots x_n, t_1 \ldots, t_n) = f_x(x_1, \ldots x_n, t_1 + c \ldots, t_n + c)$$

  Lo que indica que su densidad de probabilidad conjunta es independiente del tiempo y solo depende de $\tau = t_2 - t_1$

- **Proceso Aleatorio Estacionario en Sentido Amplio (WSS)**
  Un P.A. es estacionario en sentido amplio si su valor promedio (esperanza, media) es constante y su autocorrelación solo depende de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$

  $$E[x(t)] = \mu_x = ctte$$
  $$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$
  $$E[x^2(t)] = R_{xx}(0)$$

  Además la autocorrelación se caracteriza por :

  $$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$
  $$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$
  $$|R_{xx}(0)| = E[x^2(t)]$$

✠ La gráfica de $R_{xx}(\tau)$ nos da la información del comportamiento temporal del P.A.

Observaciones

- Si la densidad de probabilidad conjunta es independiente del tiempo hasta un orden m, se dice que el proceso es estacionario de orden m, lo que incluye la estacionaridad de los ordenes menores.
- Si el P.A. es estacionario de orden 1, el valor promedio (E[x(t)]) de la v.a es constante.
- Si es de $2^{\diamond}$ orden además de cumplirse la condición anterior la correlación entre dos v.a. dependerá, no de la ubicación absoluta sino de la distancia entre ellos (τ).

✠ Un proceso SSS es WSS, pero un proceso WSS no necesariamente es SSS.

Promedios Temporales y Ergodicidad.

- **Ergodicidad de la esperanza o media** de una función muestra x(t) de un proceso aleatorio X(t) es definido como:

$$\bar{x} = E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f dp(x) dx(t)$$

- **La Autocorrelación** de una función muestra es definida como:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) f dp(x) dx$$

✠Los valores de $\bar{x}$ y $\bar{R}_{xx}(\tau)$ dependen de la función muestra del P.A. **Proceso Ergódico**
Si la naturaleza del P.A. es tal, que los promedios estadísticos conjuntos y los promedios temporales ($\bar{x}$) son iguales, se conoce como **Proceso Ergódico**.

Un proceso estacionario X(t) se conoce como ergódico en la media sí:

$$\bar{x} = E[x(t)] = \mu_x = ctte$$

Un proceso estacionario X(t) se conoce como ergódico en la autocorrelación sí:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

✠ **Sí $X(t)$ es ergódico, todas sus promedios estadísticos pueden determinarse de una función de muestra.**

Relación de Parámetros de señales eléctricas y los promedios temporales

1. $\bar{x} = E[x(t)]$ es igual al nivel DC de la señal $x(t)$.
2. $R_{xx}(0) = E[x(t)^2] = \overline{x^2}$ es igual a la potencia promedio total de $x(t)$.
3. $E[x(t)]^2 = \bar{x}^2$ es igual a la Potencia DC de x(t).
4. $\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$ es igual a la potencia promedio AC de x(t).
5. σ_x es el valor RMS de la señal x(t).
6. $F\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(jw)$ Densidad Espectral de potencia.

Densidad Espectral de Potencia DEP $S(jw)$

Un proceso aleatorio es una colección de señales en tiempo, por tanto, no podemos calcular la transformada de Fourier del proceso en si mismo, pero podemos obtener una representación del proceso en el dominio de la frecuencia si expresamos la transformada de Fourier en términos de un promedio del conjunto de realizaciones. La secuencia de autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio (WSS) proporciona una descripción en el dominio del tiempo del momento de segundo orden del proceso. Como $R_{xx}(\tau)$ es una secuencia determinística, podemos calcular la transformada de Fourier. Esta expresión determina el espectro de potencia o densidad espectral de potencia del proceso. Conocido el espectro de potencia, podemos obtener la secuencia de autocorrelación mediante la transformada inversa. Por tanto, el espectro de potencia proporciona una descripción en el dominio de la frecuencia del momento de segundo orden del proceso.

Propiedades de la Densidad Espectral de Potencia

1. **Simetría**. Puesto que la secuencia de autocorrelación de un proceso aleatorio WSS posee simetría conjugada, el espectro de potencia es una función real de w. Si el proceso es real, la secuencia de autocorrelación es real y par, lo que implica que el espectro de potencia es real y par.

2. **Positividad**. El espectro de potencia de un proceso aleatorio WSS es no negativo.
3. **Potencia total**. La potencia de un proceso aleatorio WSS de media cero es proporcional al área bajo la curva de densidad espectral de potencia

EJEMPLO: Una señal aleatoria $Y(t) = AX(t)cos(w_c t + \phi)$, donde $X(t)$ es un proceso aleatorio, estacionario de media cero, con autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ y espectro de potencia S_{xx}. La Amplitud A y la frecuencia w_c son constantes y la fase ϕ es una v.a. distribuida uniformemente sobre $[0, 2\pi]$. Asuma que $X(t)$ y ϕ son independientes, encuentre la media, la autocorrelación y el espectro de potencia de $Y(t)$.

Solución:

a) Cálculo de la Media:

$$\mu_y(t) = E[Y(t)] = E[AX(t)cos(w_c t + \phi)] = AE[X(t)]E[cos(w_c t + \phi)]$$

como $X(t)$ es un proceso aleatorio de media cero (E[X(t)=0), luego $\mu_y = 0$

b) Cálculo de la Autocorrelación:

$$R_{yy} = E[Y(t)Y(t+\tau)] =$$

$$= \frac{A^2}{2} E[X(t)X(t+\tau)]E[cos(w_c\tau) + cos(2w_c t + w_c\tau + 2\phi)] =$$

$$= \frac{A^2}{2} R_{xx}(\tau)cos(w_c\tau) = R_{yy}(\tau)$$

c) Cálculo del Espectro de Potencia:

$$S_{yy}(jw) = F(R_{yy}(\tau)) = \frac{A^2}{2} F\Big(R_{xx}(\tau)cos(w_c\tau)\Big)$$

$$S_{yy}(jw) = \frac{A^2}{4\pi} S_{xx}(jw) * [\pi\delta(w - w_c) + \pi\delta(w + w_c)]$$

$$S_{yy}(jw) = \frac{A^2}{4}\Big[S_{xx}(w - w_c) + S_{xx}(w + w_c)\Big]$$

Paso de un Proceso Aleatorio a través de un Sistema LIT

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha$$

$$E[Y(t)] = E\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha\Big]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)E\Big[X(t-\alpha)\Big]d\alpha$$
$$= h(t) * E[x(t)]$$

Luego aplicando el mismo razonamiento pero calculando la autocorrelación de la señal de la salida y expresando la salida en función de la densidad espectral de potencia DEP obtenemos.

$$S_{yy}(jw) = \mid H(jw) \mid^2 S_{xx}(jw)$$

Ejemplos de paso por sistemas LIT de señales Aleatorias.

1. **Sumador**
   Determine Z(t)=W(t)+X(t), donde W(t) y Z(t) son procesos aleatorios ergódicos, e independientes estadísticamente.

$$R_z(\tau) = E[\{X(t) + W(t)\}\{X(t-\tau) + W(t-\tau)\}]$$

$$E[X(t)X(t-\tau)] + E[X(t)W(t-\tau)] + E[W(t)W(t-\tau)] + E[W(t)X(t-\tau)] =$$

$$R_{XX}(\tau) + R_{WW}(\tau) + E[X(t)]E[W(t-\tau)] + E[W(t)]E[X(t-\tau)] =$$

$$R_{XX}(\tau) + R_{WW}(\tau) + 2E[X(t)]E[W(t)]$$

   Si alguno de los P.A, tiene media cero, entonces:

$$R_z(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{WW}(\tau)$$

$$F\Big\{R_{zz}(\tau)\Big\} = F\Big\{R_{XX}(\tau)\Big\} + F\Big\{R_{WW}(\tau)\Big\}$$
$$S_z(jw) = S_{XX}(jw) + S_{WW}(jw)$$

2. **Retardador**
   Sea $z(t) = X(t-t_0)$, Determine la autocorrelación y la DEP de $z(t)$

$$R_z(\tau) = E[X(t-t_0)X(t-t_0-\tau)] = R_X(\tau)$$

3. **Transformador de Hilbert**
   Sea $x(t)$ una señal , cuya transformada de Fourier es $X(jw)$, la transformada de **Hilbert** de $x(t)$ es representada por $\widehat{x}(t)$, y su

transformada de Fourier es
$\widehat{X}(jw) = \mid X(jw) \mid e^{j\angle(X(jw))-j\frac{\pi}{2}sgn(jw)} = -jsgn(jw)X(jw)$.

El transformador de Hilbert, mantiene el espectro de amplitud de $x(t)$ y defasa o resta una fase 90 grados a todas las componentes en frecuencia. Si x(t), es una señal aleatoria y pasa un sistema que representa al transformador de Hilbert obtendriamos:

$$R_{yy}(\tau) = h_H(-\tau) * h_H(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

$$S_{yy}(jw) = H_H(jw) * S_{xx}(jw)$$

$$S_{yy}(jw) = \mid (-jsgn(jw)) \mid^2 *S_{xx}(jw) = G_{xx}(jw)$$

Procesos Gaussianos

Un P.A. X(t) es un proceso gaussiano, si cada función muestra de de X(t) es una v.a. gauseana. Podemos decir que X(t) tiene una distribución gaussiana si su funcion de distribución de probabilidad tiene la forma:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{[\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}]}$$

Si la variable X(t), esta normalizada, se tiene que $\bar{x} = \mu_x = 0$ y $\sigma_x^2 = 1$

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

para $N(0,1) = N(\mu, \sigma^2)$

Propiedades:

- Si X(t) es un proceso gaussiano aplicado a la entrada de un sistema LIT, la salida también es un proceso aleatorio gaussiano Y(t).
- Su un P.A. X(t), es gaussiano, entonces las funciones muestra generadas por X(t) son conjuntamente gaussianas, para cualquier n, siendo n, el orden del P.A.
- Si el proceso gaussiano es estacionario, entonces el proceso es *estrictamente estacionario.*
- Si las v.a. $x(t_1), x(t_2), \ldots x(t_n)$, son obtenidos de un proceso gaussiano $X(t)$ en los tiempos $t_1, t_2, \ldots t_n$ y son no correlacionados entonces las v.a. son estadísticamente independientes.

La Funcion Error Complementario Q(z)

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\lambda^2/2}.d\lambda$$

$$Q(0) = \frac{1}{2}; \quad Q(-z) = 1 - Q(z); \qquad z \geq 0$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(z)$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\lambda^2/2}.d\lambda$$

$$Q(z) \approx \frac{1}{z.\sqrt{2.\pi}} e^{-z^2/2}$$

z	Q(z)	z	Q(z)	z	Q(z)	z	Q(z)
0.00	0.50000	1.00	0.15866	2.00	0.02275	3.00	0.00135
0.05	0.48006	1.05	0.14686	2.05	0.02018	3.05	0.00114
0.10	0.46017	1.10	0.13567	2.10	0.01786	3.10	0.00097
0.15	0.44038	1.15	0.12507	2.15	0.01578	3.15	0.00082
0.20	0.42074	1.20	0.11507	2.20	0.01390	3.20	0.00069
0.25	0.40129	1.25	0.10565	2.25	0.01222	3.25	0.00058
0.30	0.38209	1.30	0.09680	2.30	0.01072	3.30	0.00048
0.35	0.36317	1.35	0.08851	2.35	0.00939	3.35	0.00040
0.40	0.34458	1.40	0.08076	2.40	0.00820	3.40	0.00034
0.45	0.32636	1.45	0.07353	2.45	0.00714	3.45	0.00028
0.50	0.30854	1.50	0.06681	2.50	0.00621	3.50	0.00023
0.55	0.29116	1.55	0.06057	2.55	0.00539	3.55	0.00019
0.60	0.27425	1.60	0.05480	2.60	0.00466	3.60	0.00016
0.65	0.25785	1.65	0.04947	2.65	0.00402	3.65	0.00013
0.70	0.24196	1.70	0.04457	2.70	0.00347	3.70	0.00011
0.75	0.22663	1.75	0.04006	2.75	0.00298	3.75	0.00009
0.80	0.21186	1.80	0.03593	2.80	0.00256	3.80	0.00007
0.85	0.19766	1.85	0.03216	2.85	0.00219	3.85	0.00006
0.90	0.18406	1.90	0.02872	2.90	0.00187	3.90	0.00005
0.95	0.17106	1.95	0.02559	2.95	0.00159	3.95	0.00004

Ruido El término ruido es designado a señales no deseadas que tienden a perturbar la transmisión y el procesamiento de señales en un sistema de comunicacón y sobre el cual no es posible un control completo. Las fuentes de ruido más comunes son:

- Ruido atmosférico.
- Ruido galáctico.
- fluctuaciones espontaneas de corriente, voltaje en circuitos eléctricos.
  - Ruido de disparo, ocasionados por dispositivos electrónicos.
  - Ruido térmico, ocasionado por el movimiento aleatorio de electrones en un conductor.

Ruido Blanco. El análisis del ruido en sistemas de comunicación esta basado en una idelización del ruido llamado *Ruido Blanco*, donde su densidad espectral de potencia es independiente de la frecuencia de operación.

$$S_{xx}(jw) = \frac{\eta}{2}$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$$

Ruido Blanco Gaussiano Pasabajos.

$$S_{xx}(jw) = \frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{w}{2W_B}\right)$$

Ruido Blanco Gaussiano Pasabanda.

$$S_{xx}(jw) = \frac{\eta}{2}\Big[\prod\left(\frac{w-w_c}{2W_B}\right) + \prod\left(\frac{w+w_c}{2W_B}\right)\Big]$$

Un receptor en un sistema de comunicación, usualmente incluye un procesamiento de una señal recibida. Este procesamiento puede tomar la forma de un filtro pasabanda donde su banda es ajustada a lo largo de la componente modulada de la señal recibida.
El ruido que aparece a la salida del filtro es denominado *ruido pasabanda*, con componentes espectrales de ruido pasabanda concentrados alrededor de w_c.
Para analizar los efectos del ruido pasabanda en el desempeño de sistemas de comunicación, se cuenta con dos representaciones del ruido pasabanda.

- Ruido Pasabanda definido en términos de su envolvente y fase.

$$X(t) = V(t)cos(w_c t + \Phi(t))$$

- Ruido Pasabanda definido en términos de sus componentes en fase y cuadratura.

$$X(t) = X_c(t)cos(w_c t) - X_s(t)sen(w_c t)$$

donde:

$$X_c(t) = V(t)cos(\Phi(t))$$

$$X_s(t) = V(t)sen(\Phi(t))$$

$$V(t) = \sqrt{X_c(t)^2 + X_s(t)^2}$$

$$\Phi(t) = tg^{-1}\left(\frac{X_s(t)}{X_c(t)}\right)$$

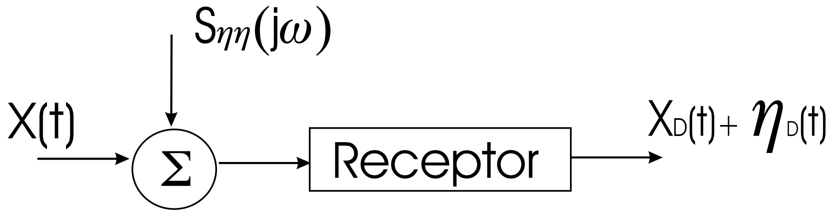
Características:

- $X_c(t)$ y $X_s(t)$ de una señal ruido pasabanda tienen media cero.
- Si la señal ruido pasabanda es gaussiana $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son gaussianas.
- Si la señal ruido pasabanda es estacionaria, entonces $X_c(t)$y $X_s(t)$ son estacionarias
- $X_c(t)$ y $X_s(t)$ tienen la misma densidad espectral de potencia.

$$S_{Xc}(jw) = S_{Xs}(jw) = S_{xx}(w - w_c) + S_{xx}(w + w_c)$$

- $X_c(t)$ y $X_s(t)$ tienen la misma varianza.
- Si $X(t)$ es gaussiana y $S_{xx}(jw)$ es simétrica con respecto a w_c, entonces $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son estadísticamente independientes.

Transmisión de Señales con Ruido. Dado el siguiente sistema.



Donde $X(t)$ es la señal a la entrada del receptor, $S_{\eta\eta}(jw)$ es la densidad espectral de potencia de la señal de ruido, $X_D(t)$ la señal en el destino y η_D es la señal del ruido en el destino. Luego $Y_D = X_D(t) + \eta_D(t)$. Calculando la autocorrelación de la salida

$$R_{yy}(\tau) = E[(X_D(t) + \eta_D(t))(X_D(t+\tau) + \eta_D(t+\tau))]$$

Si calculamos la potencia promedio total de la salida obtenemos:

$$R_Y(0) = E[X_D^2(t) + \eta_D^2(t) + 2X_D(t)\eta_D(t)] = E[Y^2(t)]$$

Luego si la fuente de ruido es independiente de la señal ó mensaje y el ruido tiene media cero, entonces la potencia promedio total estaría representada por:

$$P = E[X_D^2(t)] + E[\eta_D^2(t)]$$

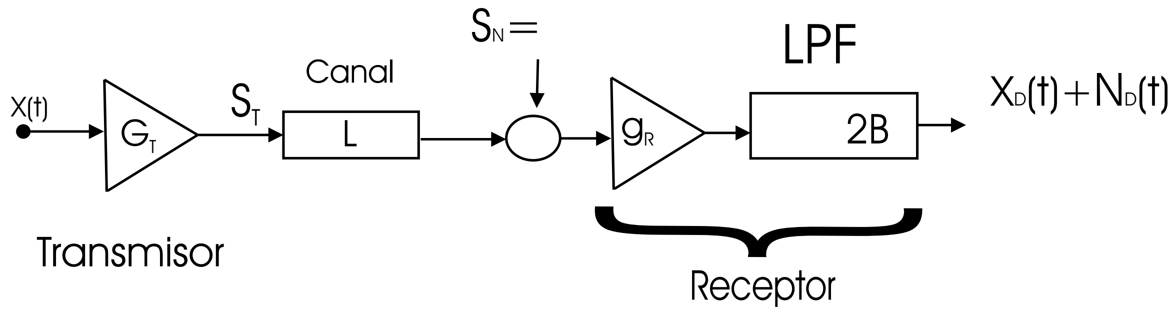
Relación Señal a Ruido.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{E[X_D^2(t)]}{E[\eta_D^2(t)]}$$

Otra forma de medir la relación Señal a Ruido es apagar la señal X(t) y medir la potencia del ruido y la potencia de la salida obteniendose:

$$\frac{E[Y_D^2(t)]}{E[\eta_D^2(t)]} = \frac{E[X_D^2(t)] + E[\eta_D^2(t)]}{E[\eta_D^2(t)]} = \left(\frac{S}{N}\right)_D + 1$$

Ejemplo Suponga el siguiente sistema de transmisión en banda base dondel el mensaje $x(t)$ tien un ancho de banda B y potencia S_x.



$$S_D = \frac{S_x g_T g_R}{L}$$

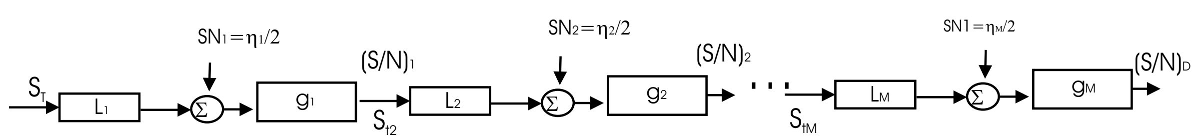
$$S_N = \frac{\eta g_R 2B}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x g_T g_R}{\eta g_R BL} = \frac{S_x g_T}{\eta LB} = \frac{S_T}{\eta LB}$$

Observamos que la relación señal a ruido de la señal recibida es:

- No depende de la ganancia del receptor.
- Es inversamente proporcional al ancho de banda del filtro.
- Es inversamente proporcional a la atenuación.

Sistema Repetidor



Los sistemas repetidores están diseñados con unidades identicas y ganancias grandes para compensar las pérdidas, es decir
$\frac{G_1}{L_1} = \frac{G_2}{L_2} = \ldots = 1; \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_M$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{2S_T g_1}{\eta_1 L_1 2B} = \frac{S_T}{\eta_1 L_1 B}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{1}{M}\left(\frac{S}{N}\right)_1$$

Demostración de la relación $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ de un sistema con repetidoras.
Sea N_1 la potencia del ruido del sistema 1:

$$N_1 = \eta_1 g_1 B$$

$$N_2 = \frac{\eta_1 g_1 B g_2}{L_2} + \eta_2 g_2 B$$

$$N_M = \frac{g_M \eta_1 g_1 B g_2}{L_2 L_M} + \frac{\eta_2 g_2 B g_M}{L_M} + \eta_M g_M B$$

Como en los sistemas de repetidoras estamos suponiendo unidades identicas y la relación $\frac{G_1}{L_1} = 1$, obtenemos:

$$N_M = \eta_1 g_1 B + \eta_2 g_2 B + \eta_M g_M B = 3\eta g_1 B = 3\eta L_1 B$$

y la relación de potencia de la señal en el destino es:

$$S_D = \frac{S_T}{L_1}.\frac{g_1}{L_2}.\frac{g_2}{L_M}.g_M = S_T$$

Luego,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{1}{M}\left(\frac{S}{N}\right)_1$$